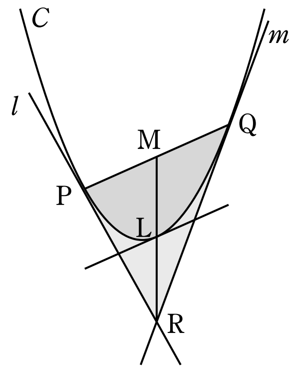
カバリエリの原理



放物線 $C: y=ax^2$（$a>0$）上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ a\alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ a\beta^2)$（$\alpha<\beta$）をとる。P, Q における放物線 C の接線をそれぞれ l, m とし，l, m の交点を R とする。

接線 l, m の方程式は，それぞれ $y=2a\alpha x-a\alpha^2$，$y=2a\beta x-a\beta^2$ と表されるから，その交点 R の座標は$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ a\alpha\beta\right)$である

点 R を通り，y 軸に平行な直線と放物線 C との交点を L，弦 PQ との交点を M とする。

L，M の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{a}{4}(\alpha+\beta)^2\right)$，$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{a}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)$

であるから，点 M は弦 PQ の中点，L は線分 RM の中点となっている。

放物線 C と 2 本の接線 l, m で囲まれた図形の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} a(x-\beta)^2dx=\cdots\cdots=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

この計算を図形的にみれば，$S_1=2\int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} ax^2dx$ として扱えることがわかる。

放物線 C と直線 PQ で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，

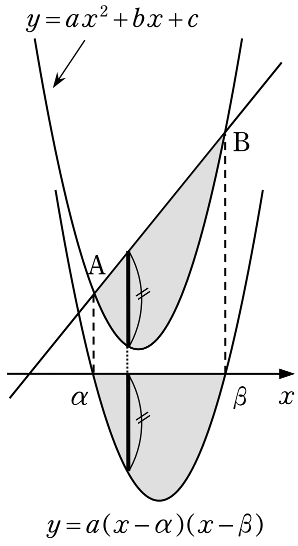
$$S_2=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

であるから，点 P, Q の取り方に関係なく，$S_1:S_2=1:2$ が成立する。

カバリエリ(Cavalieri)の原理とは，

2 つの図形 C, D があって，これをある直線に平行に切ったとき，
つねに切り口の長さが等しければ，C, D の面積は等しい

である。



例えば，この結果を踏まえると（定積分の計算からわかることであるが），$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，

放物線 $y=f(x)$と 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$を通る直線 AB で囲まれた図形の面積と，放物線 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が等しいことがわかる。

このような考え方から，先の事実（$S_1:S_2$）について説明できると，いろいろな図形の面積をもっと簡単に扱えるのではないだろうか。

先の事実（$S_1:S_2$）についての上手い説明を考えてみるとよいでしょう。

この問題を別の角度から考えてみよう。

曲線 C の方程式を $y=f(x)$ とし，接線 $l,\ m$ の方程式をそれぞれ $y=g_l(x),\ y=g_m(x)$，直線 PQ の方程式を $y=h(x)$ とする。

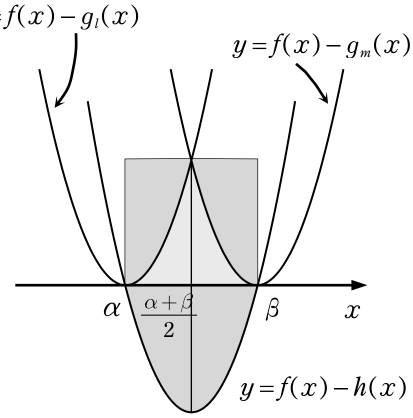
放物線 C と 2 本の接線 $l,\ m$ で囲まれた図形の面積 S_1 は，

$$S_1=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{f(x)-g_l(x)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{f(x)-g_m(x)\right\}dx$$

によって求められる。また，放物線 C と直線 PQ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$S_2=-\int_{\alpha}^{\beta}\left\{f(x)-h(x)\right\}dx$$

によって求められる。ここで，積分される関数（被積分関数）$y=f(x)-g_l(x),\ y=f(x)-g_m(x),\ y=f(x)-h(x)$ について考えてみると，そのグラフは，右図のようになる。



$\displaystyle\int_0^p x^2dx=\frac{p^3}{3}$ であることから，

$$S_1:S_2=1:2$$

であることが直ちにわかる。

このように，直線や曲線で囲まれた図形を，別の形で考えることにより，解答しやすくなることがあるので，他の問題でも試してみるとよい。

ここでは，図形の形を変えるだけで，面積を変えていない。これは，線分の長さを変えていないからであり，そのことに注意しなければならない。これは，カバリエリの原理によるものである。

2 つの図形 $C,\ D$ があって，これをある直線に平行に切ったとき，つねに切り口の長さが等しければ，$C,\ D$ の面積は等しい。　　（**カバリエリ(Cavalieri)の原理**）

カバリエリの原理をもとにして，図形的な意味を考えて変形することによって，計算が簡単になったり，答えの見当がついたりする場合は少なくない。